TD 1 : Logique

Dans tout ce TD : P, Q et R sont des assertions qui peuvent éventuellement dépendre d'une ou plusieurs variables, et E est un ensemble quelconque.

Opérateurs logiques

1 ★ On suppose que P, Q et R sont *fausses*.

1) Est-ce que $(P \implies Q) \implies R$ est vraie ?
2) Même question pour $P \implies (Q \implies R)$. Que remarque-t-on ?

2 ★☆ Écrire la négation des assertions suivantes :

1) $\text{non}\, P$ et Q
2) P ou $(Q \implies R)$
3) $P \implies (Q \implies R)$
4) $P \iff Q$

3 ★☆

1) Montrer que "$P \implies Q$" équivaut à "$\text{non}\, P$ ou Q" en utilisant une table de vérité.
2) Faire de même sans utiliser de table de vérité.

4 ★★ On définit l'opérateur logique "ouex" pour désigner le "ou exclusif". Ainsi, "P ouex Q" est vrai si l'une des deux assertions est vraie mais pas l'autre. Sinon, "P ouex Q" est fausse.

1) Dresser la table de vérité de "P ouex Q".
2) Exprimer simplement la négation de "P ouex Q".
3) Donner une assertion équivalente à "P ouex Q" en utilisant uniquement les connecteurs logiques "et", "ou" et "non".

Quantificateurs

5 ★★ Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

1) $\exists p \in \mathbb{Z} \qquad p$ est pair $\quad$ et $\quad p$ est premier
2) $\forall y \in \mathbb{R} \qquad y^2 + y + 1 > 0$
3) $\forall x \in \mathbb{R} \qquad x < 3 \implies x^2 < 9$
4) $\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2 - 4x \geq 0 \implies (x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2)$
5) $\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \leq M$
6) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{R} \qquad m^2 = n$
7) $\exists! u \in \mathbb{R} \qquad u^3 + u^2 = 0$

6 ★ Donner la négation des assertions 1) à 6) de l'exercice précédent.

7 ★★ Est-ce que les assertions suivantes sont vraies ?

- $P : (\exists x \in \mathbb{R} \quad x+1=0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R} \quad x-2=0)$
- $P' : \exists x \in \mathbb{R} \quad (x+1=0)$ et $(x-2=0)$
- $Q : \forall x \in \mathbb{R} \quad (x \neq 0 \text{ ou } x \neq 1)$
- $Q' : (\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 1)$

8 ★★

1) Exprimer "$\exists! x \in E \quad P(x)$" en utilisant les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, mais pas $\exists!$ (vous avez le droit d'utiliser des connecteurs logiques).
2) En déduire la négation de "$\exists! x \in E \quad P(x)$".

9 ★★ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer verbalement ("en français") la signification des assertions suivantes :

1) $\forall x \in I \qquad f(x) \geq 0$
2) $\forall x_1, x_2 \in I \qquad x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
3) $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \qquad f(x) = \lambda$
4) $\forall x \in I \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \lambda$

10 ★★☆ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs les assertions suivantes :

1) f s'annule au moins une fois sur I.
2) f est la fonction nulle.
3) f présente un minimum.
4) f n'est pas (une fonction) constante.
5) f est majorée.

11 ★★★ Dans cet exercice, on notera P_x et Q_x au lieu de $P(x)$ et $Q(x)$. Compléter les lignes ci-dessous avec $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\Longleftrightarrow$ selon ce qui est le plus approprié :

1) $\forall x \in E \quad P_x$ et Q_x ...... $(\forall x \in E \quad P_x)$ et $(\forall x \in E \quad Q_x)$
2) $\forall x \in E \quad P_x$ ou Q_x ...... $(\forall x \in E \quad P_x)$ ou $(\forall x \in E \quad Q_x)$
3) $\exists x \in E \quad P_x$ et Q_x ...... $(\exists x \in E \quad P_x)$ et $(\exists x \in E \quad Q_x)$
4) $\exists x \in E \quad P_x$ ou Q_x ...... $(\exists x \in E \quad P_x)$ ou $(\exists x \in E \quad Q_x)$

Raisonnements classiques

12 ★ On considère la propriété P_n : $8^n + 2$ est multiple de 7.

1) Montrer que P_n est héréditaire, c'est-à-dire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n \Longrightarrow P_{n+1}$.
2) Est-ce que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$? Moralité ?

13 ★☆ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

14 ★★ Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, l'entier $7^n - 4^n$ est un multiple de 3.

15 ★★ Soit x un réel (quelconque). Démontrer l'assertion :

$$x = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad |x| < \varepsilon$$

16 ★★ On considère 3 réels x_1, x_2, x_3 tels que

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1$$

Montrer qu'on a $x_2 - x_1 \leq \dfrac{1}{2}$ ou $x_3 - x_2 \leq \dfrac{1}{2}$.

17 ★★ Soit a et b deux réels. Montrer que si l'équation $ax + b = 0$ admet une infinité de solutions, alors $a = 0$.

18 ★★ Que penser de la preuve suivante ?

Affirmation : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: Dans une boite de n crayons, tous les crayons sont de la même couleur.
Preuve : Quand $n = 1$, l'assertion est trivialement vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons l'assertion vraie pour n crayons. Parmi $n+1$ crayons, les n premiers sont donc de la même couleur, et les n derniers aussi. Donc les $n+1$ crayons sont de la même couleur. Ainsi par récurrence, l'assertion est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. □

19 ★★ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 1 + 2^n$.

20 ★★☆ Montrer par récurrence forte que tout entier $n \geq 1$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $2^p m$ avec $p \in \mathbb{N}$ et m un entier naturel impair.

21 ★★★ Prouver : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \in \mathbb{N}$.

22 ★★★★ Dans un plan sont placés 66 points distincts. On trace toutes les droites passant par deux de ces points et on en compte 2026 distinctes. Justifiez que parmi ces 66 points, 4 au moins sont sur une même droite.

Raisonnement par analyse-synthèse

23 ★★ Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad f(x-y) = x - f(y)$$

24 ★★ Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

25 ★★★ Montrer que toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ se décompose de manière unique sous la forme

$$\forall x \in E \quad f(x) = g(x) + c$$

avec c un réel et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt = 0$.